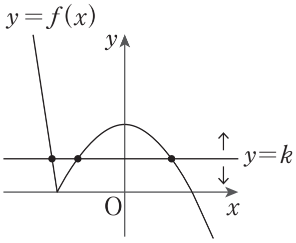
PART2　絶対値を含む２次方程式の解の個数

2 (1)　x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

(2)　x の方程式 $|x^2+2x-3|=-2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

Point Pickup

方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。
よって，定数 k が入った x の方程式の実数解の個数は，定数 k だけを右辺に分離し，左辺の式が表すグラフを用いて調べるとよい。



第 7 講　PART2　確認問題

1　x の方程式 $|x^2-4x+3|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

［ア］のとき　4 個

［イ］のとき　3 個

［ウ］のとき　2 個

［エ］のとき　0 個

① $k<0$　② $k>0$

③ $k<1$　④ $k>1$

⑤ $0<k<1$

⑥ $k<0$，$k=1$

⑦ $k>1$，$k=0$

⑧ $k=0$　⑨ $k=1$

2 x の方程式 $|x^2-3x|=x-3+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

[オ] のとき　4 個

[カ] のとき　3 個

[キ] のとき　2 個

[ク] のとき　1 個

[ケ] のとき　0 個

① $k<0$　　② $0<k<3$

③ $3<k<4$　　④ $k>4$

⑤ $3<k<4$，$4<k$

⑥ $0<k<3$，$3<k<4$

⑦ $0<k<3$，$4<k$

⑧ $k=0$　　⑨ $k=3$

⑩ $k=3$，4

【MEMO】

PART2　絶対値を含む 2 次方程式の解の個数

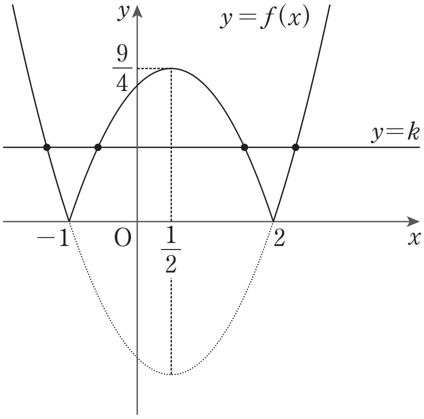
2 (1) x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

(2) x の方程式 $|x^2+2x-3|=-2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

(1) $f(x)=|x^2-x-2|$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

$$f(x)=|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$$
$$=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分のようになる。よって



$0<k<\frac{9}{4}$ のとき　4 個

$k=\frac{9}{4}$ のとき　3 個

$k>\frac{9}{4}$，$k=0$ のとき　2 個

$k<0$ のとき　0 個

(2) $|x^2+2x-3|=-2x+k$ より　$|x^2+2x-3|+2x=k$

$g(x)=|x^2+2x-3|+2x$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

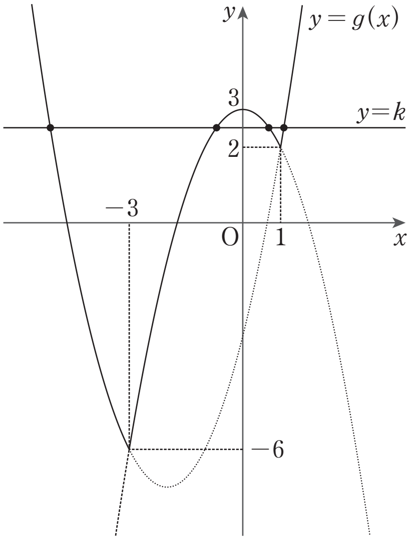
$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ であるから

$$\begin{cases} x^2+2x-3\geqq 0 \text{ の解は}\quad x\leqq -3,\ 1\leqq x \\ x^2+2x-3<0 \text{ の解は}\quad -3<x<1 \end{cases}$$

これより

$$g(x)=\begin{cases} x^2+2x-3+2x=x^2+4x-3=(x+2)^2-7 & (x\leqq -3,\ 1\leqq x) \\ -(x^2+2x-3)+2x=-x^2+3 & (-3<x<1) \end{cases}$$

ゆえに，$y=g(x)$ のグラフは右図の実線部分のようになる。



よって

$2<k<3$ のとき　4 個

$k=2,\ 3$ のとき　3 個

$-6<k<2,\ 3<k$ のとき　2 個

$k=-6$ のとき　1 個

$k<-6$ のとき　0 個

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

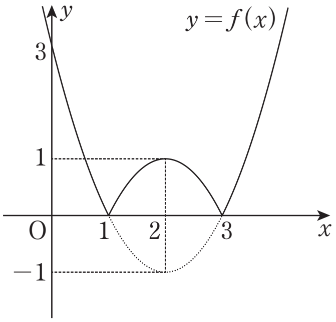
[正解] ア：⑤，イ：⑨，ウ：⑦，エ：①

[解説]

$f(x)=|x^2-4x+3|$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。[A]

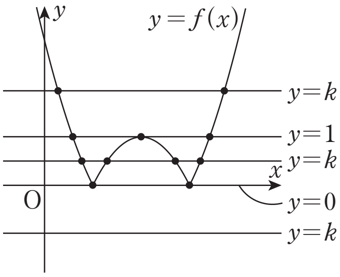
$$f(x)=|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$$
$$=|(x-2)^2-1|$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは下図の実線部分のようになる。

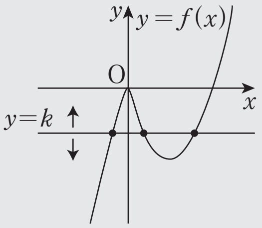


$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べて

$0<k<1$ のとき	**4 個**
$k=1$ のとき	**3 個**
$k>1$，$k=0$ のとき	**2 個**
$k<0$ のとき	**0 個**



[A]　方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。
よって，$y=f(x)$ のグラフに対し，直線 $y=k$ を上下に動かしたときに共有点の個数がどのようになるかを調べる。



2 [正解] オ：③，カ：⑩，キ：⑦，ク：⑧，ケ：①

[解説]

$|x^2-3x|=x-3+k$ より　$|x^2-3x|-x+3=k$ [B]

$f(x)=|x^2-3x|-x+3$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

$x^2-3x=x(x-3)$ であるから

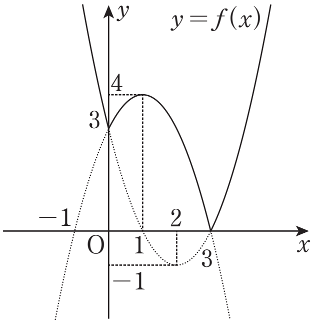
$x\leqq 0$，$3\leqq x$ のとき

$$f(x)=(x^2-3x)-x+3=x^2-4x+3$$
$$=(x-2)^2-1$$

$0<x<3$ のとき

$$f(x)=-(x^2-3x)-x+3=-x^2+2x+3$$
$$=-(x-1)^2+4$$

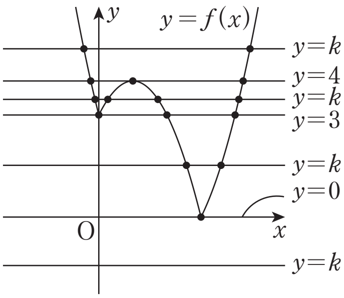
ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは下図の実線部分のようになる。



$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べて

$3<k<4$ のとき	4個
$k=3$，4 のとき	3個
$0<k<3$，$4<k$ のとき	2個
$k=0$ のとき	1個
$k<0$ のとき	0個

[B]　定数 k だけを右辺に分離する。こうすると，直線 $y=k$ は x 軸に平行であるから，共有点の個数を調べやすくなる。


y
y＝f(x)
y＝k
y＝4
y＝k
y＝3
y＝k
y＝0
O
x
y＝k